中二級數學科

第二章 恆等式

3.2 完全平方的恒等式

導學案 1

姓名：____________　　班別：_______ (　　)

備課課本頁數： P.3.12-P.3.15

課堂目標： 理解完全平方的恆等式的代數證明。

正確運用完全平方的恆等式展開代數式。

重點： 運用完全平方的恆等式展開代數式。

難點： 學生常把完全平方錯誤展開為平方和或平方差 e.g. $(2x+3)^2 = 4x^2 + 9$ ✖

已學知識：

1. 代數簡介（中一第三章）
2. 一元一次方程（中一第四章）
3. 多項式的運算（中一第六章）
4. 恆等式的意義及平方差的恆等式（本章）

平方差恆等式： $(A+B)(A-B) \equiv A^2 - B^2$ ，其中 A 及 B 可以是包含著其他代數符號的代數式。

完全平方恆等式： $(A \pm B)^2 \equiv A^2 \pm 2AB + B^2$ ，其中 A 及 B 可以是包含著其他代數符號的代數式。

證明：

左方$= (A \pm B)^2$

$= (A \pm B)(A \pm B)$

$= A(A \pm B) \pm B(A \pm B)$

$= A^2 \pm AB \pm BA + B^2$

$= A^2 \pm 2AB + B^2$　◀由於 A乘以B 與 B乘以A 都是相同結果

右方$= A^2 \pm 2AB + B^2$

$\because$ 左方 = 右方

$\therefore (A \pm B)^2 \equiv A^2 \pm 2AB + B^2$ 。

導學題目：

例子：　展開 $(3x+7y)^2$　　　展開 $(3x-7y)^2$

參考作答格式：

$(3x+7y)^2$

$= (3x)^2 + 2(3x)(7y) + (7y)^2$

$= 9x^2 + 42xy + 49y^2$

$(3x-7y)^2$

$= (3x)^2 - 2(3x)(7y) + (7y)^2$

$= 9x^2 - 42xy + 49y^2$

請根據以上例子的格式完成以下題目：

1. 展開 $(4x+3)^2$ 。

3. 展開 $(7a+6b)^2$ 。

2. 展開 $(2x-5y)^2$ 。

4. 展開 $(8-3d^2)^2$ 。

鞏固題：

精進練習 P.3.10 Q3-12

Q3 展開 $(2+5x)^2$ 。

Q4 展開 $(4-3x)^2$ 。

Q5 展開 $(4x-y)^2$ 。

Q6 展開 $(3y-7x)^2$ 。

Q7 展開 $(-2x+9y)^2$ 。

Q8 展開 $(-3x-5y)^2$ 。

Q9 展開 $2(4x-5y)^2$ 。

Q10 展開 $3(2x-7y)^2$ 。

Q11 展開 $-2(9y-4x)^2$ 。

Q12 展開 $4(-x-3y)^2$ 。

延伸題：

精進練習 P.3.11 Q34

Q34 展開 $(2a-b)^2(2a+b)^2$。

總結：

兩數相加才取平方的結果與兩數先取平方然後再相加的結果不同。不過，透過補上該兩數之積的兩倍，其結果便會相同。

e.g. $(3+5)^2$ 是 64　　3^2+5^2 是 34　　兩數之積的兩倍是 $2(3)(5)=30$

所以完全平方結構　$(3+5)^2=3^2+5^2$ 補上 $2(3)(5)=34$ 補上 $30=64$

功課：精進練習 P.3.12 Q55-60

答案：

導學題目：

1 展開 $(4x+3)^2$。

$$(4x+3)^2 = (4x)^2 + 2(4x)(3) + (3)^2$$
$$= 16x^2 + 24x + 9$$

2 展開 $(2x-5y)^2$。

$$(2x-5y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(5y) + (5y)^2$$
$$= 4x^2 - 20xy + 25y^2$$

3 展開 $(7a+6b)^2$。

$$(7a+6b)^2 = (7a)^2 + 2(7a)(6b) + (6b)^2$$
$$= 49a^2 + 84ab + 36b^2$$

4 展開 $(8-3d^2)^2$。

$$(8-3d^2)^2 = (8)^2 - 2(8)(3d^2) + (3d^2)^2$$
$$= 64 - 48d^2 + 9d^4$$

鞏固題：

Q3 展開 $(2+5x)^2$ 。

$$(2+5x)^2 = (2)^2 + 2(2)(5x) + (5x)^2$$
$$= 4 + 20x + 25x^2$$

Q4 展開 $(4-3x)^2$ 。

$$(4-3x)^2 = (4)^2 - 2(4)(3x) + (3x)^2$$
$$= 16 - 24x + 9x^2$$

Q5 展開 $(4x-y)^2$ 。

$$(4x-y)^2 = (4x)^2 - 2(4x)(y) + (y)^2$$
$$= 16x^2 - 8xy + y^2$$

Q6 展開 $(3y-7x)^2$ 。

$$(3y-7x)^2 = (3y)^2 - 2(3y)(7x) + (7x)^2$$
$$= 9y^2 - 42xy + 49x^2$$

Q7 展開 $(-2x+9y)^2$ 。

$$(-2x+9y)^2 = (-2x)^2 + 2(-2x)(9y) + (9y)^2$$
$$= 4x^2 - 36xy + 81y^2$$

Q8 展開 $(-3x-5y)^2$ 。

$$(-3x-5y)^2 = (-3x)^2 - 2(-3x)(5y) + (5y)^2$$
$$= 9x^2 + 30xy + 25y^2$$

Q9 展開 $2(4x-5y)^2$ 。

$$2(4x-5y)^2 = 2[(4x)^2 - 2(4x)(5y) + (5y)^2]$$
$$= 2(16x^2 - 40xy + 25y^2)$$
$$= 32x^2 - 20xy + 50y^2$$

Q10 展開 $3(2x-7y)^2$ 。

$$3(2x-7y)^2 = 3\left[(2x)^2 - 2(2x)(7y) + (7y)^2\right]$$
$$= 3(4x^2 - 28xy + 49y^2)$$
$$= 12x^2 - 84xy + 147y^2$$

Q11 展開 $-2(9y-4x)^2$ 。

$$-2(9y-4x)^2 = -2\left[(9y)^2 - 2(9y)(4x) + (4x)^2\right]$$
$$= -2(81y^2 - 72xy + 16x^2)$$
$$= -162y^2 + 144xy - 32x^2$$

Q12 展開 $4(-x-3y)^2$ 。

$$4(-x-3y)^2 = 4\left[(-x)^2 - 2(-x)(3y) + (3y)^2\right]$$
$$= 4(x^2 + 6xy + 9y^2)$$
$$= 4x^2 + 24xy + 36y^2$$

延伸題：

Q34 展開 $(2a-b)^2(2a+b)^2$ 。

$$(2a-b)^2(2a+b)^2 = \left[(2a-b)(2a+b)\right]^2$$
$$= \left[(2a)^2 - (b)^2\right]^2$$
$$= (4a^2 - b^2)^2$$
$$= (4a^2)^2 - 2(4a^2)(b^2) + (b^2)^2$$
$$= 16a^4 - 8a^2b^2 + b^4$$

另解 $(2a-b)^2(2a+b)^2 = \left[(2a)^2 - 2(2a)(b) + (b)^2\right]\left[(2a)^2 + 2(2a)(b) + (b)^2\right]$

$$= (4a^2 - 4ab + b^2)(4a^2 + 4ab + b^2)$$
$$= \left[(4a^2+b^2) - 4ab\right]\left[(4a^2+b^2) + 4ab\right]$$
$$= (4a^2+b^2)^2 - (4ab)^2$$
$$= (4a^2)^2 + 2(4a^2)(b^2) + (b^2)^2 - 16a^2b^2$$
$$= 16a^4 + 8a^2b^2 + b^4 - 16a^2b^2$$
$$= 16a^4 - 8a^2b^2 + b^4$$